

Deuxième problème : Électrostatique et Magnétostatique

1^{ère} partie : Condensateur cylindrique

1/ Énoncer le théorème de Gauss

Étant donnée une distribution de charge quelconque et une surface fermée quelconque S , le flux sortant du champ électrique à travers cette surface est égal au rapport par la permittivité du vide ϵ_0 de la charge Q_{int} située à l'intérieur de S :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Remarque : « énoncer » suppose une rédaction minimale en bon français. En aucun cas, l'écriture de la seule formule ne peut être suffisante.

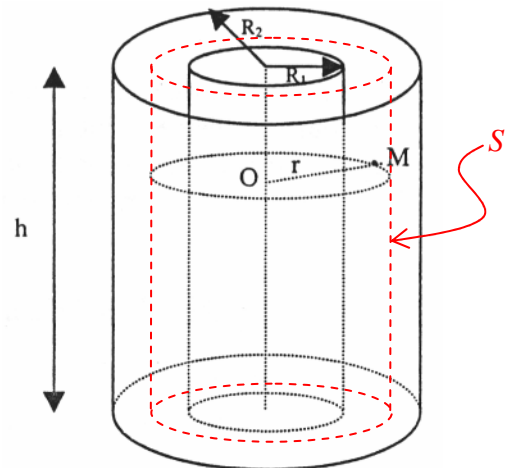
2/ Calculer la composante $E(r)$ du champ \vec{E}

L'énoncé suggère clairement (sans que cela soit dit explicitement) que l'on ne doit pas tenir compte des effets de bords.

Choisissons pour surface de Gauss, une surface fermée en forme de boîte cylindrique, constituée d'une surface latérale cylindrique de hauteur h et de deux « couvercles » circulaires.

Le vecteur \vec{E} étant radial, son flux est nul à travers les couvercles.

Le vecteur \vec{E} étant perpendiculaire à la surface latérale S_{lat} et sa valeur algébrique $E(r)$ étant uniforme sur cette surface, son flux sortant est égal au produit de cette valeur algébrique par l'aire $2\pi rh$ de cette surface latérale :



$$\phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dS = \iint_{S_{\text{lat}}} E(r) \vec{e}_r \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dS = \iint_{S_{\text{lat}}} E(r) dS = E(r) \iint_{S_{\text{lat}}} dS = 2\pi rh E(r)$$

La charge intérieure à la surface S est alors égale à la charge portée par l'armature interne du condensateur, soit Q . En appliquant le théorème de Gauss nous en déduisons : $\phi_{\vec{E}} = 2\pi rh E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$

Soit :

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rh}$$

3/ a/ Calculer la circulation du champ électrique

$$\Gamma_{\vec{E}} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rh} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} [\ln r]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

3/ b/ Relier cette circulation aux potentiels des armatures

$$\Gamma_{\vec{E}} = -\int_1^2 dV = -(V_2 - V_1) = V_1 - V_2$$

4/ a/ Exprimer la capacité C du condensateur :

$$C = \frac{Q}{V_2 - V_1} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

4/ b/ Application numérique :

$$C = 4,0 \times 10^{-11} \text{ F} = 40 \text{ pF}$$

5/ Que devient l'expression de C si les rayons sont très voisins...

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \left(1 + \frac{e}{R_1}\right)}. \text{ Sachant que } \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \text{ nous pouvons écrire : } C \underset{e \rightarrow 0}{\sim} \frac{2\pi\epsilon_0 h R_1}{e}$$

Ceci est bien l'expression de la capacité $C = \frac{\epsilon_0 S'}{e'}$ d'un condensateur plan d'épaisseur $e' = e$ et de surface $S' = 2\pi h R_1$.

6/ a/ Pour quelle valeur de r la norme du champ électrique est-elle maximale ? Calculer V_{\max} ...

$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h}$ étant une fonction décroissante de r , la norme de \vec{E} est maximale pour la valeur minimale de r , à savoir $r = R_1$.

La condition $|\vec{E}| < E_0$ s'écrit donc aussi bien $E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R_1 h} = \frac{C(V_2 - V_1)}{2\pi\epsilon_0 R_1 h} = \frac{V_2 - V_1}{R_1 (\ln R_2 - \ln R_1)} < E_0$

Où encore : $V_2 - V_1 < V_{\max} = E_0 R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}$

6/ b/ Application numérique : $V_{\max} = 2,08 \times 10^5 \text{ V} = 208 \text{ kV}$

7/ a/ Calculer l'énergie électrostatique du système de charges $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \iint_{S_1 \cup S_2} \sigma V dS$.

Le potentiel étant uniforme au niveau de chaque électrode, nous avons :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \iint_{S_1} \sigma V dS + \frac{1}{2} \iint_{S_2} \sigma V dS = \frac{1}{2} \sigma_1 V_1 S_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 V_2 S_2$$

Avec $\sigma_1 S_1 = +Q$ et $\sigma_2 S_2 = -Q$, cela s'écrit encore $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} Q(V_2 - V_1) = \frac{1}{2} C(V_2 - V_1)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

Nous reconnaissons bien l'expression de l'énergie électrique du condensateur chargé.

7/ b/ Calculer l'énergie du champ électrique par son expression intégrale $\mathcal{E}_e = \iiint_{\tau} u_e d\tau$

La densité d'énergie électrostatique ayant pour expression $u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h} \right)^2$, nous pouvons exprimer l'énergie élémentaire $d\mathcal{E}_e$ contenue dans la couche élémentaire de rayon compris entre r et $r + dr$, de volume $d\tau = 2\pi r h dr$:

$$d\mathcal{E}_e = u_e d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h} \right)^2 2\pi r h dr = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 h} \frac{dr}{r}$$

Nous obtenons l'expression de \mathcal{E}_e en intégrant cette expression de $r = R_1$ à $r = R_2$:

$$\mathcal{E}_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 h} \frac{dr}{r} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

7/ c/ Commenter ces résultats.

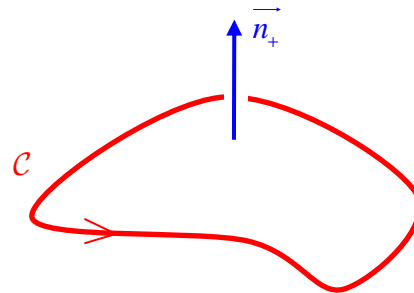
Nous trouvons la même valeur par les deux calculs : c'est bien normal, il s'agit de la même énergie.

2^{ème} partie : Câble coaxial

1/ Énoncer le théorème d'Ampère.

Étant donnée une distribution de courants quelconque, la circulation du champ d'induction magnétique sur un parcours fermé orienté C est égale au produit par μ_0 de l'intensité électrique algébriquement enlacée par la courbe C . S étant une surface s'appuyant sur la courbe C et orientée de façon conforme à l'orientation de la courbe C , l'intensité enlacée est égale au flux de la densité de courant \vec{j} à travers S . Ce flux est indépendant de la surface S choisie :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacée par } C} = \mu_0 \iint_{P \in S} \vec{j} \cdot \vec{n}_+ dS$$



2/ a/ Montrer que le champ magnétique créé en M est orthoradial.

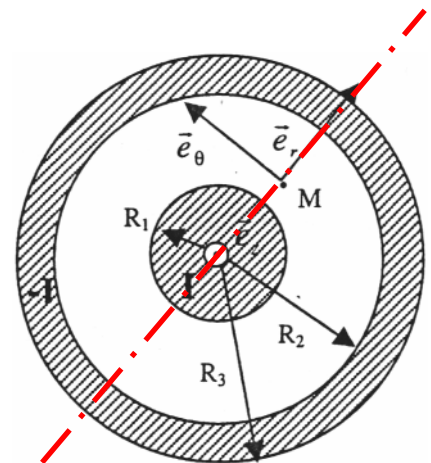
Le plan passant par M et contenant l'axe Oz est un plan de symétrie de la distribution des courants. Le champ \vec{B} est donc orthogonal à ce plan, c'est-à-dire qu'il est orthoradial.

2/ b/ Montrer qu'il peut se mettre sous la forme $B(r)\vec{e}_\theta$

Le problème est invariant par rotation autour de Oz, le module de \vec{B} ne dépend donc pas de θ .

Le problème est invariant par translation selon Oz, le module de \vec{B} ne dépend donc pas de z.

Conclusion : $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$



2/ b/ Préciser la forme des lignes de champ.

Les lignes de champ sont circulaires, coaxiales avec le cylindre

3/ a/ Montrer que le champ est nul pour $r > R_3$

Considérons un contour circulaire centré sur l'axe, de rayon $r > R_3$. L'intensité enlacée par cette courbe fermée a pour valeur $I_{\text{enlacée}} = +I - I = 0$. Nous en déduisons, par application du théorème d'Ampère, que la circulation de \vec{B} sur ce parcours est nulle : $2\pi r B(r) = 0$, donc $\vec{B} = \vec{0}$.

3/ b/ Expliquer l'intérêt du câble coaxial.

Le câble coaxial, contrairement à un fil simple, ne crée pas de champ à l'extérieur et donc ne perturbe pas les circuits avoisinants.

4/ Calculer les densités de courants

La densité de courant, supposée uniforme, est égale au rapport de l'intensité et de la section du fil :

$$\vec{j}_1 = + \frac{I_1}{\pi R_1^2} \vec{e}_z = + \frac{I}{\pi R_1^2} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{j}_2 = + \frac{I_2}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \vec{e}_z = - \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \vec{e}_z$$

5/ Calcul de la composante $B(r)$ par application du théorème d'Ampère

Dans tous les cas, nous choisissons pour parcours d'Ampère un parcours circulaire centré sur l'axe Oz et passant par M. La circulation du champ d'induction magnétique sur un tel parcours a pour expression

$$\Gamma_{\vec{B}} = \int_c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B(r) \text{ et le théorème d'Ampère s'écrit : } \Gamma_{\vec{B}} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Selon la valeur de r , le courant algébriquement enlacé a différentes expressions :

5/ a/ $r < R_1$: $I_{\text{enlacé}} = j_1 \times \pi r^2 = +I \frac{r^2}{R_1^2}$ et donc $B(r) = + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R_1^2}$

5/ b/ $R_1 < r < R_2$: $I_{\text{enlacé}} = +I$ et donc $B(r) = + \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

5/ c/ $R_2 < r < R_3$: $I_{\text{enlacé}} = I + j_2 \times \pi (r^2 - R_2^2) = +I \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$ et donc $B(r) = + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R_3^2 - R_2^2} \left(\frac{R_3^2}{r} - r \right)$

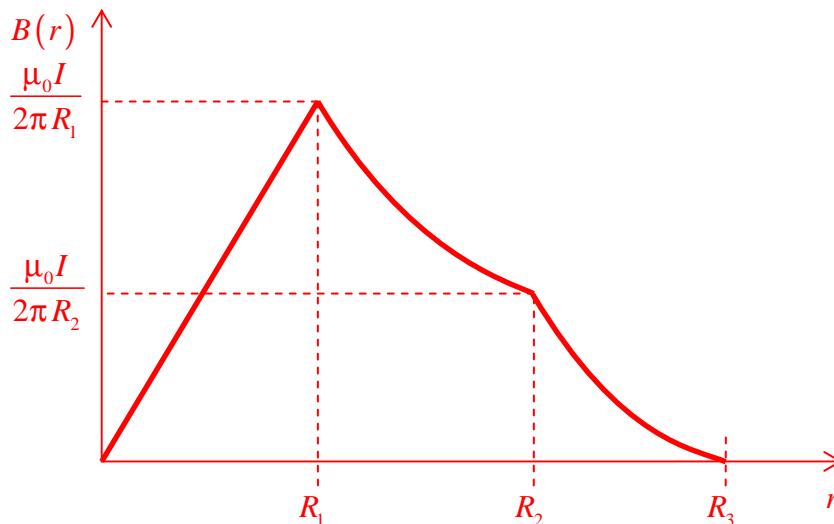
6/ Justifier, puis vérifier la continuité du champ \vec{B}

Justification : En l'absence de courants surfaciques, la composante tangentielle de \vec{B} est nécessairement continue à la traversée des interfaces.

Vérification : En $r = R_1$, $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1}$ calculé avec a/ aussi bien qu'avec b/

En $r = R_2$, $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2}$ calculé avec b/ aussi bien qu'avec c/

7/ Dessiner le graphe de $B(r)$



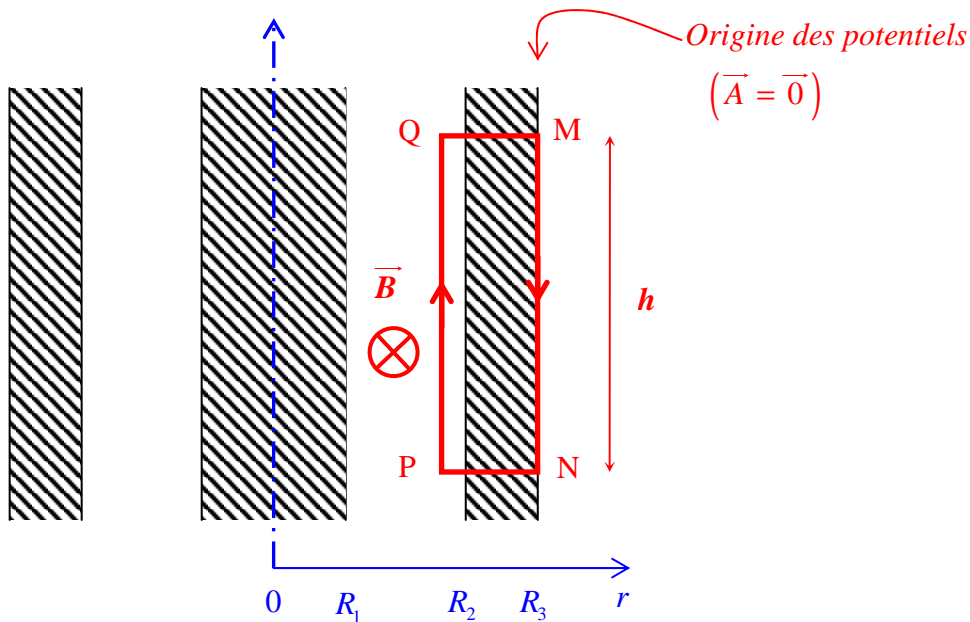
8/ Quelles sont les propriétés d'invariance et de symétrie du potentiel vecteur \vec{A} défini dans le cadre de la Jauge de Coulomb ?

Le plan passant par M et orthogonal à Oz est un plan d'antisymétrie de la distribution des courant, il s'ensuit que le potentiel vecteur en M est orthogonal à ce plan et donc colinéaire à Oz : $\vec{A} = A_z \vec{e}_z$

De plus, le problème étant invariant par rotation quelconque autour de Oz et par translation quelconque selon Oz , la composante A_z de doit dépendre que de r : $\vec{A} = A_z(r) \vec{e}_z$

9/ Déterminer le potentiel vecteur \vec{A} .

Le champ étant nul à l'extérieur du câble, nous pouvons choisir le potentiel vecteur nul pour $r = R_3$. Il sera alors nul à l'infini. Dans chaque cas, nous choisissons un parcours rectangulaire orthogonal au champ \vec{B} orienté de telle sorte que le flux de \vec{B} soit positif, comme indiqué sur le schéma suivant :



La circulation du potentiel vecteur sur le segment MN est nulle du fait que l'on a choisi $A_z(R_3) = 0$.

Cette circulation est nulle sur les segments NP et QM, orthogonaux à \vec{A} .

A_z étant uniforme sur le segment PQ, nous en déduisons que la circulation de \vec{A} sur le parcours fermé MNPQN est égale à $A_z(r)h$. Dans chaque cas, nous écrivons que la circulation de \vec{A} est égale au flux de \vec{B} :

$$\oint_{\text{MNPQM}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = A_z(r)h = \iint_{\text{Surface MNPQ}} \vec{B} \cdot \vec{e}_\theta dS = h \int_r^{R_3} B(r) dr \quad \text{soit} \quad A_z(r) = \int_r^{R_3} B(r) dr$$

9/ c/ $R_2 < r < R_3$:
$$A_z(r) = \int_r^{R_3} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R_3^2 - R_2^2} \left(\frac{R_3^2}{r} - r \right) dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R_3^2 - R_2^2} \left[R_3^2 \ln r - \frac{r^2}{2} \right]_r^{R_3}$$

soit
$$A_z(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \ln \frac{R_3}{r} - \frac{R_3^2 - r^2}{2(R_3^2 - R_2^2)} \right)$$

et, en particulier,
$$A_z(R_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \ln \frac{R_3}{R_2} - \frac{1}{2} \right)$$

9/ b/ $R_1 < r < R_2$:
$$A_z(r) = A_z(R_2) + \int_r^{R_2} B(r) dr = A_z(R_2) + \int_r^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = A_z(R_2) + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R_2}{r}$$

soit
$$A_z(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \ln \frac{R_3}{R_2} - \frac{1}{2} + \ln \frac{R_2}{r} \right)$$

et, en particulier,
$$A_z(R_1) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \ln \frac{R_3}{R_2} - \frac{1}{2} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$9/ a/ r < R_1 : A_z(r) = A_z(R_1) + \int_r^{R_1} B(r) dr = A_z(R_1) + \int_r^{R_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R_1^2} dr = A_z(R_1) + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{2R_1^2} \right)$$

$$\text{soit } A_z(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \ln \frac{R_3}{R_2} + \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{r^2}{2R_1^2} \right)$$

$$\text{et, en particulier, } A_z(0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \ln \frac{R_3}{R_2} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$10/ a/ \text{ Calculer l'énergie magnétostatique du système de courants } \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \iiint_{\tau_1 \cup \tau_2} \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m1} &= \frac{1}{2} \iiint_{\tau_1} \vec{j}_1 \cdot \vec{A} d\tau_1 = \frac{1}{2} \frac{I}{\pi R_1^2} \int_0^{R_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \ln \frac{R_3}{R_2} + \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{r^2}{2R_1^2} \right) \times 2\pi r h dr \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi R_1^2} h \left[\left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \ln \frac{R_3}{R_2} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{8R_1^2} \right]_0^{R_1} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} h \left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \ln \frac{R_3}{R_2} + \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m2} &= \frac{1}{2} \iiint_{\tau_2} \vec{j}_2 \cdot \vec{A} d\tau_2 = -\frac{1}{2} \frac{I}{\pi (R_3^2 - R_2^2)} \int_{R_2}^{R_3} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R_3^2 - R_2^2} \left(R_3^2 \ln \frac{R_3}{r} - \frac{R_3^2 - r^2}{2} \right) \times 2\pi r h dr \\ &= -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \frac{h}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \left[\frac{r^2}{2} R_3^2 \ln \frac{R_3}{r} + \frac{R_3^2 r^2}{4} + \frac{r^4}{8} \right]_{R_2}^{R_3} \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} h \left(\frac{R_2^2 R_3^2}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \ln \frac{R_3}{R_2} - \frac{R_3^2 + R_2^2}{4(R_3^2 - R_2^2)} \right) \end{aligned}$$

Soit, après ces calculs un peu longs ...

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m1} + \mathcal{E}_{m2} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} h \left(\left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)^2 \ln \frac{R_3}{R_2} + \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{R_3^2}{2(R_3^2 - R_2^2)} \right)$$

$$10/ b/ \text{ Calculer l'énergie du champ d'induction magnétique } \mathcal{E}_m = \iiint_{\tau_1 \cup \tau_2 \cup \tau_3} \vec{u}_m d\tau.$$

La densité volumique d'énergie magnétique a pour expression $u_m = \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{2\mu_0}$ et, dans un environnement de

symétrie cylindrique de révolution, l'intégrale de volume s'écrit : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^{R_3} B(r)^2 \times 2\pi r h dr$

Nous décomposons ce calcul en trois contributions :

$$\mathcal{E}'_{m1} = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^{R_1} B(r)^2 \times 2\pi r h dr = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^{R_1} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R_1^2} \right)^2 \times 2\pi r h dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} h \frac{1}{R_1^4} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{R_1} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} h \times \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_{m2} &= \frac{1}{2\mu_0} \int_{R_2}^{R_3} B(r)^2 \times 2\pi r h dr = \frac{1}{2\mu_0} \int_{R_2}^{R_3} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R_3^2 - R_2^2} \left(\frac{R_3^2}{r} - r \right) \right)^2 \times 2\pi r h dr \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} h \left(\left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)^2 \ln \frac{R_3}{R_2} - \frac{3R_3^2 - R_2^2}{4(R_3^2 - R_2^2)} \right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}'_{m3} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{R_1}^{R_2} B(r)^2 \times 2\pi r h dr = \frac{1}{2\mu_0} \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 \times 2\pi r h dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} h \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Soit finalement :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}'_{m1} + \mathcal{E}'_{m2} + \mathcal{E}'_{m3} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} h \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)^2 \ln \frac{R_3}{R_2} - \frac{3R_3^2 - R_2^2}{4(R_3^2 - R_2^2)} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$

10/ c/ Commenter ces résultats.

Tout d'abord, nous constatons que les deux calculs aboutissent à une même expression de l'énergie magnétique, le deuxième calcul ayant l'avantage de désigner le lieu de sa localisation.

Par ce calcul, nous avons déterminé l'inductance par unité de longueur du câble coaxial :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow L = \frac{\mu_0}{2\pi} h \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)^2 \ln \frac{R_3}{R_2} - \frac{3R_3^2 - R_2^2}{4(R_3^2 - R_2^2)} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$

Note : Dans le cas d'un câble coaxial dont la tresse de masse peut être considérée sans épaisseur, le retour se faisant sous la forme d'un courant de surface, les expressions sont plus simples. Seules subsistent les énergies localisées dans l'âme du câble et dans l'espace diélectrique entre les conducteurs. L'inductance par unité de longueur du câble prend alors la valeur :

$$\frac{L}{h} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$